S2D5 – Hauptseminar Niedrigdimensionale Topologie
Zopfgruppen und Konfigurationsräume

S4D2 – Graduate Seminar on Topology
Braid groups and configuration spaces

Martin Palmer-Anghel // Sommersemester 2019 // Mi 12 Uhr (c.t.), Seminarraum N0.007

Zusammenfassung. Das Ziel dieses Seminars ist die Einführung der *Zopfgruppen* und die Untersuchung ihrer verschiedenen Facetten, insbesondere ihrer Verbindung mit *Konfigurationsräumen*, sowie auch mit Abbildungsklassengruppen von Flächen und Knotentheorie. Der allgemeine Überblick ist:

- Einführung und Verbindung mit Konfigurationsräumen (Vorträge 1–4).
- Verbindungen mit Automorphismengruppen freier Gruppen und Abbildungsklassengruppen von Flächen (Vorträge 5–7).
- Verbindungen mit Knotentheorie (Vorträge 8–9).
- Darstellungen von Zopfgruppen durch Abbildungsklassengruppen (Vorträge 10–12).
- Homologie und Kohomologie der Zopfgruppen (Vorträge 13–14).

Webseite.

- math.uni-bonn.de/people/palmer/Zopf.html, oder
- mdp.ac/teaching/19-braids-configurations.html

Voraussetzungen für das Seminar.

- Der Kurs *Einführung in die Geometrie und Topologie*, insbesondere die Fundamentalgruppe und die Theorie der Überlagerungen.
- Der Kurs *Topologie I*, insbesondere Homologie.

Bedarfe des Seminars. Die Bedarfe dieses Seminars sind (a) die regelmäßige Teilnahme am Seminar und (b) einen Vortrag (oder mehr, wenn Sie wollen) zu halten. Sie sollten das Thema Ihres Vortrags spätestens eine Woche im Voraus mit mir besprechen (siehe die Webseite des Seminars für meine Sprechstunden), zu welcher Zeit Sie einen Gesamtplan Ihres Vortrags schon haben sollten. Vorträge sollten 90 Minuten dauern, inklusive genügend Zeit für Fragen (also planen Sie 75–80 Minuten).

Liste der Vorträge.

1. Definitionen von Zopfgruppen
2. Faserbündel, klassifizierende Räume und Homotopiegruppen
3. Die reinen Zopfgruppen und das Zentrum der Zopfgruppen
4. Konfigurationsräume und Räume von Polynomen
5. Automorphismen freier Gruppen
6. Zopfgruppen als Abbildungsklassengruppen
7. Zopfgruppen von Flächen und die exakte Sequenz von Birman
8. Zopfgruppen und Verschlingungen
9. Der Satz von Markov
10. Homologische Darstellungen von Zopfgruppen – die Darstellungen von Burau
11. Die Darstellungen der Zopfgruppen von Lawrence-Krammer-Bigelow
12. Linearität der Zopfgruppen
13. Die Kohomologie modulo 2 der Zopfgruppen
14. Integrale homologische Stabilität der Zopfgruppen

Kurzbeschreibungen der Vorträge.

1. Definitionen von Zopfgruppen. (03.04)

(*Sprecher:* **Arne Beines**)

Die Zopfgruppen durch Zopf-Diagramme und Reidemeister-Bewegungen einführen. Den Beweis von Satz 1.6 von [KT] skizzieren, der Reidemeister-Bewegungen und Isotopien von Zopf-Diagrammen miteinander verbindet. Eine endliche Präsentierung der Zopfgruppen mithilfe von Satz 1.12 von [KT] beschreiben.

Quellen. [KT] Teile 1.1 und 1.2.

2. Faserbündel, klassifizierende Räume und Homotopiegruppen. (10.04)

(*Sprecher:* **Nicolas Schmitt**)

Einen Überblick über die Theorie von Faserbündeln, Überlagerungen und klassifizierenden Räumen diskreter Gruppen geben. Auch die Homotopiegruppen $\pi_n(-)$ definieren, und die lange exakte Sequenz von Homotopiegruppen, die einem Faserbündel zugehört, beschreiben. Das Hauptziel dieses Vortrags ist es, diese Theorie klar zu beschreiben, ohne zu viel auf die Details vieler Beweise einzugehen.

Quellen. [DK] Kapitel 4, [Hat] Kapiteln 1.3 und 1.B plus S. 340ff und 375ff

3. Die reinen Zopfgruppen und das Zentrum der Zopfgruppen. (17.04)

(*Sprecher:* **Jonas Nehme**)

Die *reinen Zopfgruppen* definieren, und einige gruppentheoretische Eigenschaften davon beweisen, unter Annahme von Satz 1.16 von [KT], der im nächsten Vortrag bewiesen werden wird. Beweisen Sie nämlich, dass die reinen Zopfgruppen P_n torsionsfrei und residuell endlich sind, und dass die Abelianisierung von P_n frei von Rang $\binom{n}{2}$ ist. Auch das *Zentrum* der Zopfgruppe B_n berechnen, und folgern, dass Zopfgruppen mit verschiedenen Anzahlen von Fäden nicht isomorph sein können.

Quellen. [KT] Teil 1.3

4. Konfigurationsräume und Räume von Polynomen. (24.04)

(*Sprecher:* **Erik Babuschkin**)

Die *Konfigurationsräume* und die *Fadell-Neuwirth Faserbündel*[1] (Lemma 1.27 von [KT]) einführen, und diese benutzen, um zu beweisen, dass Konfigurationsräume auf asphärischen Flächen asphärisch sind. Geben Sie eine äquivalente Definition von (reinen) Zopfgruppen, indem Sie die Konfigurationsräume benutzen. Dann Satz 1.16 von [KT] beweisen, der in der letzten Vorlesung eine Annahme war, und einen topologischen Beweis der Tatsache, dass die Zopfgruppen B_n torsionsfrei sind, geben. Ein Modell für den klassifizierenden Raum von B_n als einen Raum von Polynomen beschreiben.

Quellen. [KT] Teil 1.4

5. Automorphismen freier Gruppen. (01.05)

(*Sprecher:* **Johanna Luz**)

Beweisen Sie, dass es eine Einbettung der Zopfgruppe B_n in die Gruppe $\mathrm{Aut}(F_n)$ aller Automorphismen der freien Gruppe auf n Erzeugern gibt (Satz 1.31 von [KT]). Erklären Sie, was mit dem *Wortproblem* für eine gegebene Gruppe G mit einer gegebenen Menge von Erzeugern S gemeint ist, und geben Sie eine Lösung des Wortproblems für die Zopfgruppe B_n mit ihrer kanonischen Menge von Erzeugern.

Quellen. [KT] Teil 1.5

6. Zopfgruppen als Abbildungsklassengruppen. (08.05)

(*Sprecher:* **Nicolai Gerber**)

Die *Abbildungsklassengruppen* von Mannigfaltigkeiten einführen, und die Elemente, die *half-twists* im Falle einer orientierten Fläche genannt sind, beschreiben. Eine Skizze eines Beweises dafür geben, dass die Zopfgruppen B_n isomorph zu gewissen Abbildungsklassengruppen sind (Satz 1.33 von [KT]).

Quellen. [KT] Teile 1.6 und 1.7

[1] Beachten Sie, dass [KT] die Phrase “locally trivial fibration” statt “fibre bundle” benutzen.

7. Zopfgruppen von Flächen und die exakte Sequenz von Birman. (15.05)

(*Sprecher:* **Avital Berry**)

Die *Zopfgruppen von Flächen* $B_n(S)$ für eine gegebene Fläche S definieren, und die verallgemeinerte exakte Sequenz von Birman (Satz 9.1 von [FM]) konstruieren. Diese zeigt, dass $B_n(S)$ eine Untergruppe einer gewissen Abbildungsklassengruppe ist, solange S eine gewisse Bedingung erfüllt (insbesondere wenn die Euler-Klasse von S negativ ist oder wenn S die geschlossene 2-Scheibe ist). Der Fall $S = D^2$ verallgemeinert das Resultat des vorherigen Vortrags mithilfe des Lemmas von Alexander (Lemma 2.1 von [FM]). Zuerst den besonderen Fall der exakten Sequenz von Birman im Satz 4.6 von [FM] beweisen, und dann erklären, wie dieser Fall auf den allgemeinen Fall erweitert werden kann. Wenn es genug Zeit gibt, dann auch zeigen, dass die Zopfgruppen $B_n(S^2)$ auf der 2-Sphäre Erweiterungen von Abbildungsklassengruppen durch $\mathbb{Z}/2$ sind.

Quellen. [FM] Teile 4.2 und 9.1

8. Zopfgruppen und Verschlingungen. (22.05)

(*Sprecher:* **Roman Pleskovsky**)

Verschlingungen, Verschlingung-Diagramme und ihre Reidemeister-Bewegungen einführen. Beweisen Sie, dass zwei Zöpfe mit n Fäden isotope Abschlüsse im Volltorus haben dann und nur dann, wenn sie in B_n konjugiert sind (Satz 2.1 von [KT]). Dann beweisen Sie, dass jede Verschlingung in $\mathbb{R}^3$ isotop zum Abschluss eines Zopfes ist (Satz von Alexander; Satz 2.3 von [KT]).

Quellen. [KT] Teile 2.1–2.3

9. Der Satz von Markov. (29.05)

(*Sprecher:* **Koen van Greevenbroek**)

Beweisen Sie, dass zwei Zöpfe isotope Abschlüsse in $\mathbb{R}^3$ haben dann und nur dann, wenn sie durch eine endliche Reihe von sogenannten *Markov-Bewegungen* verbunden sind. Dies ist der Satz von Markov; Satz 2.8 von [KT]. Der Beweis davon ist etwas lang, also sollten Sie einen Überblick über die wichtigsten Ideen geben, und einige – aber nicht alle! – Details auswählen, um diese gründlich zu erklären.

Quellen. [KT] Teile 2.5–2.7

10. Homologische Darstellungen von Zopfgruppen – die Darstellungen von Burau. (05.06)

(*Sprecher:* **Sid Maibach**)

Die *Burau-Darstellung* von B_n definieren, zuerst indem Sie explizite Matritzen zu ihren Erzeugern zuordnen (wie im Teil 3.1.1 von [KT]) und dann geometrisch (wie in den Teilen 3.2.1 und 3.2.2 von [KT]), indem Sie die Interpretation von B_n als eine Abbildungsklassengruppe benutzen, und beweisen Sie, dass diese zwei Definitionen äquivalent sind (Teil 3.2.5 von [KT]). Skizzieren Sie einen Beweis, dass diese Darstellungen für $n \geqslant 6$ nicht treu (injektiv) sind, indem Sie die Theorie von *Dehn-Twists* auf Flächen einführen.

Quellen. [KT] Teile 3.1 und 3.2

11. Die Darstellungen der Zopfgruppen von Lawrence-Krammer-Bigelow. (19.06)

(*Sprecher:* **Branko Juran**)

Definieren Sie die *Lawrence-Krammer-Bigelow-Darstellung* (LKB-Darstellung) von B_n wie in den Teilen 3.5.1–3.5.3 von [KT]. Dies ist ein Homomorphismus $B_n \to \mathrm{Aut}_R(\mathcal{H})$, wobei $R = \mathbb{Z}[t^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$ ist und $\mathcal{H}$ ein R-Modul ist. Skizzieren Sie, nach Teil 4 von [Big], einen Beweis, dass $\mathcal{H}$ ein freier R-Modul von Rang $\binom{n}{2}$ ist. Folgern Sie, dass die Zopfgruppen B_n *linear* sind (d.h. sie besitzen jeweils eine Einbettung in $GL_r(\mathbb{F})$ für eine endliche Zahl r und einen Körper $\mathbb{F}$), unter Annahme, dass die LKB-Darstellung $B_n \to \mathrm{Aut}_R(\mathcal{H})$ treu (d.h. injektiv) ist.

Quellen. [KT] Teile 3.5.1–3.5.4, [Big]

12. Linearität der Zopfgruppen. (26.06)
(*Sprecher:* **Sigurður Jens Albertsson**)
Vervollständigen Sie den Beweis, dass die Zopfgruppen linear sind, indem Sie beweisen, dass die LKB-Darstellung $B_n \to \mathrm{Aut}_R(\mathcal{H})$ treu (injektiv) ist, nach den Teilen 3.5.5 und 3.6–3.7 von [KT]. Dies ist ein langer und etwas komplizierter Beweis, also sollten Sie als Ziel haben, einen Überblick über die Ideen des Beweises zu geben, und nur ein paar Punkte auszuwählen, um diese ausführlicher zu beweisen.
Quellen. [KT] Teile 3.5–3.7

13. Die Kohomologie modulo 2 der Zopfgruppen. (03.07)
(*Sprecher:* **Ödül Tetik**)
Berechnen Sie die Kohomologie mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}/2$ des Konfigurationsraums $C_n(\mathbb{R}^2)$ — was auch die Kohomologie modulo 2 von B_n ist, weil wir wissen, dass $C_n(\mathbb{R}^2)$ ein klassifizierender Raum für B_n ist — nach dem Artikel [Fuks], indem Sie eine gewisse zelluläre Zerlegung von $C_n(\mathbb{R}^2)$ studieren, und zelluläre Kohomologie benutzen. Berechnen Sie zuerst die additive Struktur der Kohomologie, d.h. als einen graduierten $\mathbb{F}_2$-Vektorraum, und beschreiben Sie dann (ohne Beweis) die multiplikative Struktur.
Quellen. [Fuks], [Arn]

14. Integrale homologische Stabilität der Zopfgruppen. (10.07)
(*Sprecher:* **Peng Hui How**)
Sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit mit nicht leerem Rand (das wichtigste Beispiel für dieses Seminar ist $M = D^2$). Definieren Sie eine *Stabilitätsabbildung* $C_n(M) \to C_{n+1}(M)$ und beweisen Sie, dass diese Abbildung isomorphismen auf integraler Homologie in den Graden $\leqslant \frac{n}{2}$ induziert (Proposition A.1 von [Seg]), nach dem Beweis im Anhang zu §5 (Seiten 68–72) von [Seg].
Quellen. [Seg] S. 68–72, [Arn]

Quellen.

[Arn] V. I. Arnol'd, *On some topological invariants of algebraic functions*, Trans. Moscow Math. Soc., vol. 21, pp. 30–52 (1970).
[Big] S. Bigelow, *The Lawrence-Krammer representation*, from: "Topology and Geometry of Manifolds (Athens, GA, 2001)", Proc. Sympos. Pure Math., vol. 71, pp. 51–68, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2003).
[DK] J. F. Davis, P. Kirk, *Lecture notes in algebraic topology*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 35, American Mathematical Society, Providence, RI (2001).
[FM] B. Farb, D. Margalit, *A primer on mapping class groups*, Princeton Mathematical Series, vol. 49, Princeton University Press (2011).
[Fuks] D. B. Fuks, *Cohomologies of the group COS mod* 2, Funct. Anal. Appl., vol. 4, pp. 143–151 (1970).
[Hat] A. Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge (2002).
[KT] C. Kassel, V. Turaev, *Braid groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 247, Springer, New York (2008).
[Seg] G. Segal, *The topology of spaces of rational functions*, Acta Math., vol. 143, no. 1–2, pp. 39–72 (1979).