

**STABILITÉ HOMOLOGIQUE DES MAPPINGS CLASS GROUPS  
LILLE, 2-4 JUILLET 2018**

Lieu du groupe de travail : campus Lille 1, *bâtiment* M3, salle Duhem (1er étage). Attention ! Les horaires sont modulables : si vous voulez passer plus de temps pour un exposé, c'est possible et merci de nous le signaler. Le but du groupe de travail est la compréhension de la preuve de la stabilité homologique à coefficients constants pour les groupes de difféotopie des surfaces [réf précise du th. à ajouter + réf historique]. Via un argument de suite spectrale, ce résultat se déduit de la connexité d'un certain complexe simplicial.

Les exposés sont répartis comme suit :

- Exposés d'introduction aux objets du théorème et aux outils de la preuve : 1.1 à 1.4, 2.3.
- Exposés présentant la preuve : 2.1, 2.2, 3.1, 3.2.
- Exposés d'ouverture (plus libres) : 2.4, 3.3, 3.4.

1. PREMIER JOUR : HOMOLOGIE DES GROUPES, TECHNIQUES DE TOPOLOGIE  
ALGÈBRIQUE

1.1. **10h00 : accueil.**

1.2. **10h30-11h45 : Définition géométrique de l'homologie des groupes [Sacha Ikonicoff].** Définition de l'espace classifiant d'un groupe, puis l'homologie d'un groupe. Présentation des motivations et des applications de l'homologie des groupes. Éventuellement, exposer une brève histoire de l'homologie des groupes.

Références : [Bro94]

1.3. **11h45-13h30 : pause déjeuner.**

1.4. **13h30-14h45 : Définition algébrique de l'homologie des groupes [Mario Gonves-Lamas].** Rappels de foncteurs dérivés, puis présentation de la définition algébrique de l'homologie de groupes (à coefficients possiblement tordus). Théorème de comparaison avec la définition géométrique.

Références : [Wei94, Web11, Bro94]

1.5. **15h00-16h15 : Suites spectrales [Ouriel Bloede].** Rappels sur les suites spectrales pour un complexe double, filtrations associées. Suite spectrale de Lyndon–Hochschild–Serre.

Références : [Wei94]

1.6. **16h15-16h45 : Café.**

1.7. **16h45-18h00 : Complexes simpliciaux [Sebastian Cea].** Définition des complexes simpliciaux. Homotopie,  $n$ -connexité, complexes sphériques.

Références : [FP11]

2. DEUXIÈME JOUR : LA STABILITÉ HOMOLOGIQUE ET LES GROUPES DE DIFFÉOTOPIE

2.1. **9h00-10h15 : Stratégie générale de preuve d'un résultat de stabilité homologique** [Sylvain Douteau]. On présentera la stratégie générale pour les preuves de stabilité homologique. On définira en particulier les complexes simpliciaux associés à une famille de groupes.

Références : [WR14]

2.2. **10h15-10h45 : Café.**

2.3. **10h45-12h00 : L'argument de la suite spectrale** [Viet-Cuong Pham]. Présenter l'argument utilisant les suites spectrales dans les preuves de stabilité homologique. Pourquoi la connexité des complexes simpliciaux implique la stabilité homologique ?

Références : [Wah10, Wah13]

2.4. **12h00-14h00 : pause déjeuner.**

2.5. **14h00-15h15 : Les groupes de difféotopie 1** [Alexandre Eimer]. Exposé d'introduction : Rappels sur les surfaces, somme connexe sur le bord et introduction des groupes de difféotopie des surfaces.

Références : [Mas, FM11]

2.6. **15h15-15h45 : Café.**

2.7. **15h45-17h00 : Les groupes de difféotopie 2** [Jacques Darné]. Présenter quelques propriétés classiques des groupes de difféotopie des surfaces (qui auront été introduits dans l'exposé précédent). Eventuellement introduction de la catégorie des surfaces décorées et structure monoidale tressée.

Références : [Mas, FM11] [WR14]

2.8. **19h30 : Repas de conférence au restaurant "L'assiette du marché".**

3. TROISIÈME JOUR : UNE PREUVE DE STABILITÉ HOMOLOGIQUE

3.1. **9h00-10h15 : Définition des complexes simpliciaux associés aux mapping class groups** [Maxime Lucas]. Présenter les complexes simpliciaux utilisés dans le cas des mappings class groups, les "ordered arc complex".

Références : [Wah10, Wah13]

3.2. **9h00-10h15 : Café.**

3.3. **10h15-12h00 : Preuve de la connexité des complexes simpliciaux** [Martin Palmer-Anghel]. Prouver la  $(n-)$ connexité des complexes introduits dans l'exposé précédent.

Références : [Wah10], [Wah13, section 4]

3.4. **12h00-13h30 : pause déjeuner.**

### 3.5. 13h30-15h00 : D'autres résultats de stabilité homologique - Généralisation aux coefficients tordus - Homologie stable [Arthur Soulié].

Exposé d'ouverture : tour d'horizon des résultats de stabilité homologique pour différentes familles de groupes. Peut-être introduction des notions de foncteurs polynomiaux, pour les calculs à coefficients tordus. Exposé d'ouverture : que sait-on calculer comme homologie stable ? Citer résultats + grandes idées de preuves. Coeffs constants : Madsen-Weiss pour les MCG, Galatius pour les automorphismes de groupes libres, et autres résultats cités dans [Ves10]. Coeffs tordus : etc.

Références : [WR14].

#### RÉFÉRENCES

- [Bro94] Kenneth S. Brown. *Cohomology of groups*, volume 87 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1994. Corrected reprint of the 1982 original.
- [FM11] Benson Farb and Dan Margalit. *A Primer on Mapping Class Groups (PMS-49)*. Princeton University Press, 2011.
- [FP11] Davide L. Ferrario and Renzo A. Piccinini. *Simplicial structures in topology*. CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC. Springer, New York, 2011. Translated from the 2009 Italian original by Maria Nair Piccinini.
- [Mas] Gwénaél Massuyeau. Lectures on mapping class groupe, braid groups and formality. URL : <http://massuea.perso.math.cnrs.fr/notes/formality.pdf>.
- [Ves10] Christine Vespa. Homologie stable des groupes, 2010. URL : <http://irma.math.unistra.fr/vespa/Vespa-forum.pdf>.
- [Wah10] N. Wahl. Homological stability for mapping class groups of surfaces. *ArXiv e-prints*, June 2010. URL : <http://adsabs.harvard.edu/abs/2010arXiv1006.4476W>.
- [Wah13] Nathalie Wahl. The Mumford conjecture, Madsen-Weiss and homological stability for mapping class groups of surfaces. In *Moduli spaces of Riemann surfaces*, volume 20 of *IAS/Park City Math. Ser.*, pages 109–138. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013. URL : <http://www.math.ku.dk/wahl/PCM11ec.pdf>.
- [Web11] Peter J. Webb. An Introduction to the Cohomology of Groups, 2011. URL : <http://www-users.math.umn.edu/webb/oldteaching/Year2010-11/8246CohomologyNotes.pdf>.
- [Wei94] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. URL : <https://doi.org/10.1017/CBO9781139644136>.
- [WR14] N. Wahl and O. Randal-Williams. Homological stability for automorphism groups. *ArXiv e-prints*, September 2014. URL : <http://adsabs.harvard.edu/abs/2014arXiv1409.3541W>.