Classes d'homologie à support compact pour les groupes modulaires de surfaces de type infini

Martin Palmer-Anghel // Séminaire GT3, IRMA, Strasbourg // 19 February 2024

Résumé.

La conjecture de Mumford (une conséquence du théorème de Madsen-Weiss) décrit l'homologie (rationnelle) de la colimite des groupes modulaires $\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,1})$ lorsque $g \to \infty$. En revanche, on peut aussi considérer la colimite des surfaces $\Sigma_{g,1}$ pour obtenir une surface Σ_∞ de type infini, et ensuite considérer l'homologie de son groupe modulaire $\mathrm{Mod}(\Sigma_\infty)$. Celle-ci n'admet pas d'ensemble dénombrable de générateurs en aucun degré positif et sa structure précise est très mystérieuse. Il existe un homomorphisme naturel du premier groupe d'homologie vers le second, et il est naturel de se demander si son image est non nulle. On peut se demander plus généralement, pour toute surface S de type infini, si son groupe modulaire admet des classes d'homologie non nulles à support compact. Nous donnerons une réponse complète à cette question lorsque $g(S) > 0$ et une réponse partielle lorsque $g(S) = 0$. Cela représente un travail en commun avec Xiaolei Wu.

Abstract.

The Mumford conjecture (a consequence of the Madsen-Weiss theorem) describes the (rational) homology of the colimit of the mapping class groups $\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,1})$ as $g \to \infty$. One may alternatively take the colimit of the surfaces $\Sigma_{g,1}$ themselves, to obtain an infinite-type surface Σ_∞ and then consider the homology of the mapping class group $\mathrm{Mod}(\Sigma_\infty)$, which is uncountably generated in all positive degrees and whose precise structure is very mysterious. There is a natural homomorphism from the former to the latter, and it is a natural question to ask whether its image is non-zero. One may more generally ask, for any infinite-type surface S, whether its mapping class group admits non-zero compactly-supported homology classes. We will give a complete answer to this question when $g(S) > 0$ and a partial answer when $g(S) = 0$. This represents joint work with Xiaolei Wu.