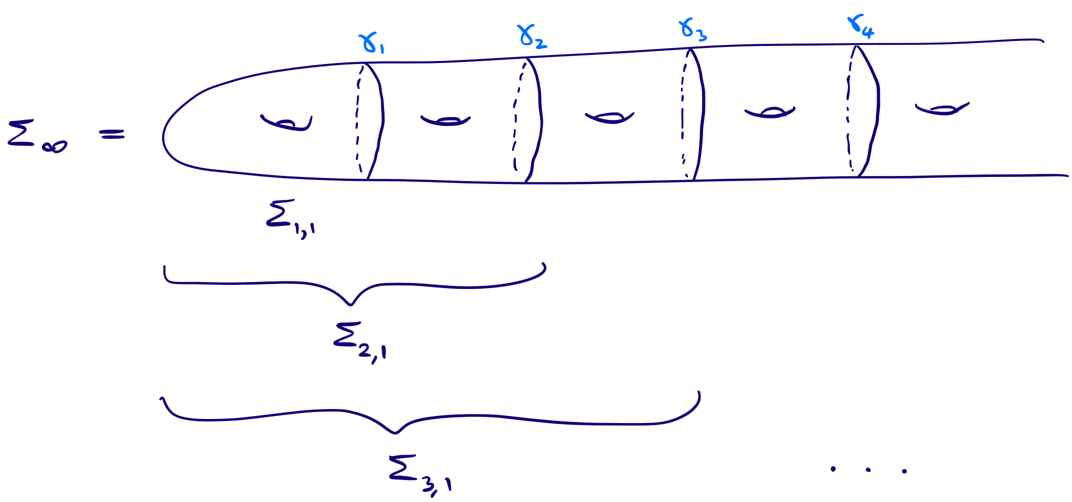
Classes d'homologie à support compact pour les groupes modulaires de surfaces de type infini

(Travail en commun avec Xiaolei Wu)

Séminaire GT3
IRMA
Strasbourg
19 février 2024

Considérons la surface :

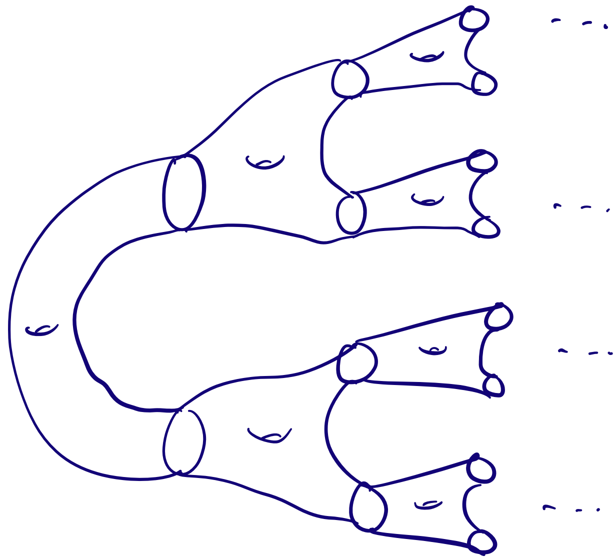


... et les homomorphismes :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Mod}(\Sigma_{1,1}) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(\Sigma_{2,1}) & \longrightarrow & \mathrm{Mod}(\Sigma_{3,1}) & \longrightarrow & \cdots \\ \| & & & & & & \\ \pi_0 \mathrm{Homeo}_\partial(\Sigma_{1,1}) & & & & & & \end{array}$$

étendre les homéomorphismes par l'identité

Un autre exemple:

$\Sigma_e =$ 

$$Mod(\Sigma_{1,2}) \to Mod(\Sigma_{3,4}) \to \cdots \to Mod(\Sigma_{2^n-1,\, 2^n}) \to \cdots$$

<u>Thm</u> (Harer '85)

$H_i(Mod(\Sigma_{g,b}))$ est indépendante de g, b lorsque $g \gg i$

En particulier les homomorphismes ci-dessus induisent des iso's sur H_i lorsque $g \gg i$.

$\rightsquigarrow$ "homologie stable"

$$\lim_{g\to\infty} H_*(Mod(\Sigma_{g,b})) \cong H_*(Mod_c(\Sigma_\infty))$$

$$\cong H_*(\underbrace{Mod_c(\Sigma_e)}_{})$$

sous-groupe de tous les éléments à support compact

<u>Thm</u> (Madsen–Weiss '02)

L'homologie stable est isomorphe à $H_*(\Omega^\infty_0 MTSO(2))$.

En particulier, avec des coefficients en $\mathbb{Q}$, l'homologie stable est

$$\mathbb{Q}[\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots] \qquad |\kappa_i| = 4i.$$

Classes de Miller - Morita - Mumford

<u>Q</u>: Les (duals des) classes MMM sont-ils non-0 dans $H_*(\mathrm{Mod}(\Sigma_\infty))$ ou $H_*(\mathrm{Mod}(\Sigma_e))$?

le groupe modulaire dans son ensemble

<u>I.e.</u> L'inclusion $\mathrm{Mod}_c(S) \hookrightarrow \mathrm{Mod}(S)$ induit-elle un homomorphisme non nul sur $\tilde{H}_*$ pour $S = \Sigma_\infty$ ou Σ_e ?

Plus généralement — la même question pour <u>toute</u> surface de type infini S.

<u>Au sujet de $H_*(\mathrm{Mod}(S))$:</u>

- <u>Thm</u> [P.-Wu '24]

  $H_i(\mathrm{Mod}(\Sigma_\infty))$ n'admet pas d'ensemble dénombrable de générateurs $\forall i \geq 1$.

- $H_i(\mathrm{Mod}(\Sigma_e))$ est inconnue, mais :

  <u>Thm</u> [P.-Wu '22] $H_i(\mathrm{Mod}(\Sigma_e \setminus pt)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & i \text{ pair} \\ 0 & i \text{ impair} \end{cases}$

Désormais — on considère des coefficients dans un corps F.

(Le cas des coefficients dans $\mathbb{Z}$ est un travail en cours.)

Thm [P.-Wu]

Ⓐ Si $\text{genre}(S) = \infty$, alors $\text{Mod}_c(S) \hookrightarrow \text{Mod}(S)$ induit l'homomorphisme nul sur $\widetilde{H}_*$.

En particulier, les classes MMM sont envoyées à 0 en $H_*(\text{Mod}(S))$.

Ⓑ Si $\text{genre}(S) \in [1, \infty)$, alors $\text{Mod}_c(S) \hookrightarrow \text{Mod}(S)$ induit un homomorphisme non nul sur $\widetilde{H}_*$.

Ⓒ Si $\text{genre}(S) = 0$, c'est compliqué.

Par exemple :

ensemble de Cantor

- Lorsque $S = \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$, l'homomorphisme induit sur $\widetilde{H}_*$ est nul.
- Lorsque $S = \underbrace{(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}) \# \cdots \# (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N})}_{k}$, — " — $\begin{cases} \text{nul} & k = 1 \\ \text{non nul} & k \geq 4 \end{cases}$

Plan : donner les idées de la preuve du Thm Ⓐ (2 étapes)

Première observation :

Thm Ⓐ est équivalent à : si $\text{genre}(S) = \infty$ et $\Sigma \subset S$ est une sous-surface compacte alors $\text{Mod}(\Sigma) \to \text{Mod}(S)$ induit 0 sur $\widetilde{H}_*$. (∗)

Par classification, $\Sigma \cong \Sigma_{g,b}$ pour $g \geq 0$, $b \geq 1$

Étape $\boxed{1}$ Réduction au cas $b = 1$.

Étape $\boxed{2}$ Preuve lorsque $b = 1$.

Étape $\boxed{\mathrm{II}}$.

Supposons que $(*)$ est vrai pour $b=1$.

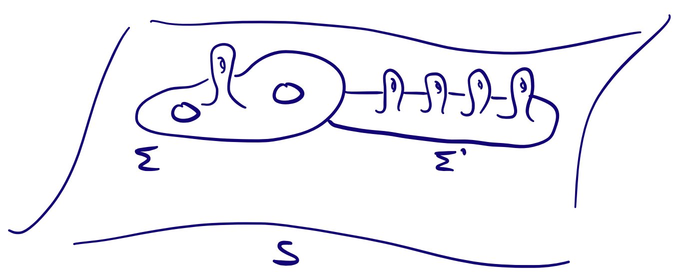
Soit $\Sigma_{g,b} \cong \Sigma \hookrightarrow S$ une sous-surface compacte.

Puisque $\mathrm{genre}(S) = \infty$, on peut trouver une autre sous-surface compacte $\Sigma_{h,1} \cong \Sigma' \hookrightarrow S$ telle que

(i) h est arbitrairement grand

(ii) $\Sigma' \cap \Sigma$ = intervalle dans $\partial \Sigma' \cap \partial \Sigma$ $\left(\Rightarrow \Sigma' \cup \Sigma \cong \Sigma' \natural \Sigma \right)$

somme connexe à bord



Soit $i \geq 1$ et choisissons $h \geq \frac{3}{2} i$.

$$\begin{tikzcd}
H_i(\mathrm{Mod}(\Sigma)) \arrow[dr] \arrow[drr, bend left, "(*)"] & & \\
& H_i(\mathrm{Mod}(\Sigma' \cup \Sigma)) \arrow[r] & H_i(\mathrm{Mod}(S)) \\
H_i(\mathrm{Mod}(\Sigma')) \arrow[ur, two heads] \arrow[urr, bend right, "0"'] & &
\end{tikzcd}$$

par hypothèse

surjectif par [Harer '85].

Donc $(*) = 0$.

$\square$

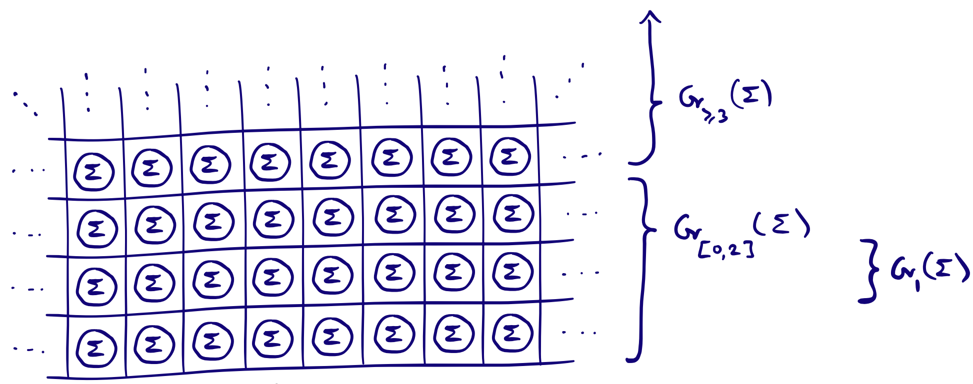
Étape $\boxed{2}$.

$\text{genre}(S) = \infty$

$\Sigma_{g,1} \cong \Sigma \hookrightarrow S$ sous-surface compacte.

Définition Surface « grille » :

$Gr(\Sigma) =$



on note les copies de Σ pour $\Sigma_{i,j}$ pour $i \in \mathbb{Z}$, $j \in \mathbb{N}$

Puisque $\text{genre}(S) = \infty$, l'inclusion $\Sigma \hookrightarrow S$ s'étend à un plongement propre $Gr(\Sigma) \hookrightarrow S$.

On a donc une factorisation de $\mathrm{Mod}(\Sigma) \to \mathrm{Mod}(S)$ en

$$\mathrm{Mod}(\Sigma) \xrightarrow{(*)} \mathrm{Mod}(Gr(\Sigma)) \longrightarrow \mathrm{Mod}(S)$$

La démonstration se réduit à :

Prop. L'homomorphisme (*) induit l'homomorphisme nul sur $\tilde{H}_j$ pour tout $j \geq 0$.

Démonstration — par récurrence sur j.

$\mathcal{H}(n,j)$: L'homomorphisme
$$Mod(\Sigma) \xrightarrow{i_n} Mod(Gr_{\geq n}(\Sigma))$$
$(n \geq 0,\ j \geq 0)$
$$[\varphi] \longmapsto \left[\begin{array}{ll} \varphi & \text{sur } \Sigma_{0,n} \\ id & \text{partout ailleurs} \end{array}\right]$$

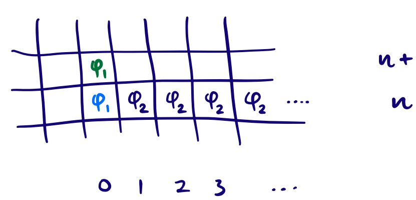
induit l'homomorphisme nul sur $\tilde{H}_j$.

$j=0$ ✓

$j \geq 1$:

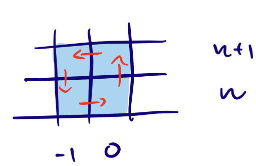
$$Mod(\Sigma) \times Mod(\Sigma) \xrightarrow{\eta_n \quad \nu_n} Mod(Gr_{\geq n}(\Sigma))$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) \longmapsto$$

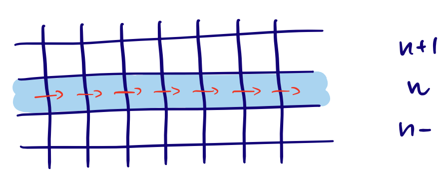


$$\psi_{0,n}(\varphi) := \eta_n(\varphi, \varphi)$$
$$\psi_{1,n}(\varphi) := \eta_n(id, \varphi)$$

Obs : $\eta_n \sim \nu_n$



$\psi_{0,n} \sim \psi_{1,n}$



$$
\begin{tikzcd}
& & \mathrm{Mod}(\mathrm{Gr}_{\geqslant n}(\Sigma)) \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{conj.}"] \\
\mathrm{Mod}(\Sigma) \arrow[r, "\Delta"] \arrow[urr, bend left, "\psi_{1,n}"] & \mathrm{Mod}(\Sigma) \times \mathrm{Mod}(\Sigma) \arrow[r, "\eta_n"] \arrow[d, "i_{n+1} \times \psi_{1,n}"] \arrow[dr, "\nu_n"] & \mathrm{Mod}(\mathrm{Gr}_{\geqslant n}(\Sigma)) \arrow[d, leftrightarrow, "\mathrm{conj.}"] \\
& \mathrm{Mod}(\mathrm{Gr}_{\geqslant n+1}(\Sigma)) \times \mathrm{Mod}(\mathrm{Gr}_{n}(\Sigma)) \arrow[r, "\mathrm{coller}"'] & \mathrm{Mod}(\mathrm{Gr}_{\geqslant n}(\Sigma))
\end{tikzcd}
$$

$\alpha \in H_j(\mathrm{Mod}(\Sigma))$

[Künneth]

$$\Delta_*(\alpha) \in H_j(\mathrm{Mod}(\Sigma)) \cong \bigoplus_{k+\ell=j} H_k(\mathrm{Mod}(\Sigma)) \otimes H_\ell(\mathrm{Mod}(\Sigma))$$

$$\| $$

$$\alpha \otimes 1 + \underbrace{\cdots\cdots}_{} + 1 \otimes \alpha$$

disparaissent par l'application $(i_{n+1})_* \otimes (\psi_{1,n})_*$ par récurrence

L'image de α dans $H_j(\mathrm{Mod}(\mathrm{Gr}_{\geqslant n}(\Sigma)))$ est $(i_{n+1})_*(\alpha) + (\psi_{1,n})_*(\alpha)$

Mais l'image est aussi $(\psi_{1,n})_*(\alpha)$.

Donc $(i_{n+1})_*(\alpha) = 0$ dans $H_j(\mathrm{Mod}(\mathrm{Gr}_{\geqslant n}(\Sigma)))$.

$$\|$$

$$(i_n)_*(\alpha)$$

puisque $i_n \sim i_{n+1}$

$\square$

Suppléments :

Ⓑ genre$(S) \in [1, \infty)$

Ⓒ genre$(S) = 0$

Ⓑ

Supposons que genre$(S) = g \in [1,\infty)$.

- $\Sigma_{g,1} \hookrightarrow S \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Mod}(\Sigma_{g,1}) \to \mathrm{Mod}(S)$
- [remplir tous les "bouts" de S] $\cong \Sigma_g \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Mod}(S) \to \mathrm{Mod}(\Sigma_g)$

(compactification par les bouts
= compactification de Freudenthal)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Mod}(\Sigma_{g,1}) \arrow[r, "(*)"] \arrow[rr, bend right] & \mathrm{Mod}(S) \arrow[r] & \mathrm{Mod}(\Sigma_g) \end{tikzcd}$$

surjectif sur H_2 lorsque $g \geq 2$ [Harer '85]
(+ Ivanov, Boldsen)

$H_2(\mathrm{Mod}(\Sigma_g)) \neq 0$ lorsque $g \geq 2$ $\quad \left(\begin{array}{ll} \mathbb{Z}/2 & g=2 \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/2 & g=3 \\ \mathbb{Z} & g \geq 4 \end{array} \right)$

Donc $(*)$ est non nul sur H_2 pour $g \geq 2$.

Pour $g = 1$, $\quad \underset{\displaystyle \mathbb{Z}}{\underset{\cong}{H_1(\mathrm{Mod}(\Sigma_{1,1}))}} \twoheadrightarrow \underset{\displaystyle \mathbb{Z}/12}{\underset{\cong}{H_1(\mathrm{Mod}(\Sigma_1))}}$

est surjectif, alors $(*)$ est non nul sur H_1 pour $g = 1$.

(c)

Si $S = \underbrace{(\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}) \# \cdots \#}_{k} (\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N})$, alors $\mathrm{Mod}_c(S) \hookrightarrow \mathrm{Mod}(S)$

induit $\begin{cases} \text{l'homomorphisme nul sur } \widetilde{H}_* \text{ si } k=1 \\ \text{un homomorphisme non nul sur } \widetilde{H}_* \text{ si } k \geqslant 4. \end{cases}$

<u>$k=1$</u>

$\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N} \;\cong\; \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2$

On peut utiliser une « méthode de surface grille » comme dans la démonstration pour genre$(S) = \infty$ ci-dessus.

<u>$k \geqslant 4$</u>

espace des bouts de S

stabilisé par tout homéomorphisme

Plus généralement, si genre$(S) = 0$
et $\mathcal{E}(S)$ contient un sous-ensemble topologiquement distingué A de cardinalité $|A| = k \in [4, \infty)$

alors $\mathrm{Mod}_c(S) \hookrightarrow \mathrm{Mod}(S)$ induit un homomorphisme non nul sur H_1.

<u>Démonstration</u>:

On plonge $\Sigma_{0,k} \hookrightarrow S$ tel que chaque composante connexe de $S \setminus \Sigma_{0,k}$ contient un point de $A \subseteq \mathrm{Ends}(S)$.

$\rightsquigarrow \quad \mathrm{Mod}(\Sigma_{0,k}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(S)$

Puisque $A \subseteq \mathrm{Ends}(S)$ est topologiquement distingué, on a

$$\mathrm{Mod}(S) \longrightarrow \mathrm{Mod}(S \cup \{\text{tous les bouts sauf } A\}) \cong \mathrm{Mod}(\mathbb{S}^2 \setminus k \text{ points})$$

__Pour $k \geq 2$:__

$$
\begin{tikzcd}
 & & \mathbb{Z}/2 \arrow[d] & & \\
 & & B_k(\mathbb{S}^2) \arrow[r, two heads] \arrow[d] & \mathbb{Z}/2(k-1) \arrow[r, two heads] & \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z}/2(k-1) & k \text{ pair} \\ \mathbb{Z}/(k-1) & k \text{ impair} \end{array} \right. \\
\mathrm{Mod}(\Sigma_{0,k}) \arrow[r, "(*)"] & \mathrm{Mod}(S) \arrow[r] & \mathrm{Mod}(\mathbb{S}^2 \setminus k \text{ points}) \arrow[urr, two heads] & &
\end{tikzcd}
$$

$\mathrm{Mod}(\Sigma_{0,k}) \ni$  $\longmapsto 2 \in \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{Z}/2(k-1) & k \text{ pair} \\ \mathbb{Z}/(k-1) & k \text{ impair} \end{array} \right.$

Donc $(*)$ est non nul sur $(-)^{ab} = H_1$ lorsque :

$(k \text{ pair})$: $2 \not\equiv 0 \mod 2(k-1)$ $\longleftarrow$ ssi $k \geq 4$

$(k \text{ impair})$: $2 \not\equiv 0 \mod (k-1)$ $\longleftarrow$ ssi $k \geq 5$

$\square$