Représentations homologiques des groupes de tresses soudés et des groupes de difféotopie

Martin Palmer-Anghel // Séminaire d'algèbre et de géométrie, LMNO, Caen // 5 March 2024

Résumé.

Une question fondamentale pour n'importe quel groupe est de savoir s'il est *linéaire* – c'est-à-dire s'il agit fidèlement sur un espace vectoriel de dimension finie. Par exemple, les groupes d'automorphisme des groupes libres ne sont pas linéaires (Formanek-Procesi), alors que les groupes de tresses sont linéaires (Bigelow, Krammer) via les célèbres *représentations de Lawrence-Krammer-Bigelow* (LKB). La question est cependant complètement ouverte pour de nombreux groupes ayant une origine topologique, tels que les groupes de tresses soudés et les groupes de difféotopie des surfaces. Pour les groupes de ce type, les *représentations homologiques* constituent une source majeure de représentations grandement non triviales.

Je décrirai d'abord une construction très générale de représentations homologiques des groupes de mouvement et des groupes de difféotopie – qui donne notamment une extension *pro-nilpotente* des représentations LKB des groupes de tresses, ainsi que des analogues pour les groupes de tresses soudés.

Je décrirai ensuite un analogue de la famille des *représentations de Lawrence* (qui généralisent les représentations LKB) pour les groupes de difféotopie des surfaces. Celles-ci dépendent du choix d'une représentation V du groupe de Heisenberg discret. Une subtilité importante est que ces représentations des groupes de difféotopie sont en général *tordues*, essentiellement à cause de la non-commutativité du groupe de Heisenberg discret. Néanmoins, j'expliquerai comment les détordre pour des choix particuliers de V, et aussi pour tout V si l'on se restreint au groupe de Torelli.

Cela représente plusieurs travaux en commun : avec Arthur Soulié, avec Jacques Darné et Arthur Soulié, et avec Christian Blanchet et Awais Shaukat.

Abstract.

A fundamental question that one may ask about any group is whether it is *linear* – i.e. whether it acts faithfully on a finite-dimensional vector space. For example, automorphism groups of free groups are non-linear (Formanek-Procesi) whereas braid groups are linear (Bigelow, Krammer) via the celebrated *LKB representations*. The question is, however, wide open for many groups of a topological origin, such as loop braid groups and mapping class groups of surfaces. For groups of this kind, an important source of highly non-trivial representations is *homological representations*.

I will first describe a very general construction of homological representations of motion groups and mapping class groups – which yields in particular a "pro-nilpotent" extension of the LKB representations of the braid groups, as well as analogues for the loop braid groups.

I will then describe an analogue of the family of *Lawrence representations* (which generalise the LKB representations) for mapping class groups of surfaces. These depend on choosing a representation V of the discrete Heisenberg group. An important subtlety is that these mapping class group representations are in general *twisted*, essentially as a consequence of the non-commutativity of the discrete Heisenberg group. However, I will explain how to untwist them for particular choices of V, and also for any V if we restrict to the Torelli group.

This represents several joint works: with Arthur Soulié, with Jacques Darné and Arthur Soulié, and with Christian Blanchet and Awais Shaukat.