

Nullité et indénombrabilité dans l’homologie des groupes de difféotopie des surfaces de type infini

Vanishing and uncountability in the homology of mapping class groups of infinite-type surfaces

Martin Palmer-Anghel // Séminaire GAAO, Clermont-Ferrand // 15 April 2025

Résumé.

Les groupes de difféotopie des surfaces de type infini (aussi appelés « grands groupes de difféotopie ») sont récemment devenus les objets d’études intensives. Ils se présentent sous une variété sauvage de formes et leur homologie est actuellement mal connue. Je décrirai un récent travail en commun avec Xiaolei Wu, dans lequel nous démontrons deux résultats de nullité et un résultat d’indénombrabilité pour l’homologie des grands groupes de difféotopie pour certaines familles de surfaces.

En me concentrant sur des exemples clés, j’expliquerai pourquoi le groupe de difféotopie du disque fermé moins un ensemble de Cantor $D^2 \setminus \mathcal{C}$ est acyclique et pourquoi l’homologie du groupe de difféotopie de la « surface du monstre du Loch Ness » L est générée de manière indénombrable en chaque degré. Je montrerai également que, pour toute surface de genre infini S (par exemple $S = L$), toute classe d’homologie sur son groupe de difféotopie ayant un support sur une sous-surface compacte s’annule. Cela signifie que toutes les classes de Miller–Morita–Mumford s’annulent sur le groupe de difféotopie de S . La stabilité homologique apparaît comme une technique cruciale de deux manières différentes dans les démonstrations de ces résultats.

Abstract.

Mapping class groups of infinite-type surfaces (a.k.a. “big mapping class groups”) have recently become the subject of intensive study. They come in a wild variety of forms and relatively little is currently known about their homology. I will describe recent joint work with Xiaolei Wu, in which we prove two vanishing results and one uncountability result for the homology of big mapping class groups for certain families of surfaces.

Focusing on key examples, I will explain why the mapping class group of the closed disc minus a Cantor set $D^2 \setminus \mathcal{C}$ is acyclic and why the homology of the mapping class group of the “Loch Ness monster surface” L is uncountably generated in every degree. I will also show that, for any infinite-genus surface S (e.g. $S = L$), every homology class on its mapping class group that has support on a compact subsurface vanishes. This means that all of the Miller–Morita–Mumford classes vanish on the mapping class group of S . Homological stability appears as a crucial technique in two different ways in the proofs of these results.