Nullité et indénombrabilité dans l'homologie des groupes de difféotopie des surfaces de type infini

Travail en commun avec
Xiaolei Wu (Shanghaï)

Séminaire GAAO
Clermont-Ferrand
15 Avril 2025

S — surface de type infini

$\mathrm{Mod}(S) = \pi_0(\mathrm{Homeo}^+(S))$ ← id sur ∂S

Type infini $\overset{\text{déf.}}{\iff}$ $S \neq$ surface compacte moins quelques composantes de ∂

$\iff$ $\pi_1(S)$ pas de type fini (∄ ensemble fini de générateurs)

$\iff$ $\mathrm{Mod}(S)$ est indénombrable

Exemples

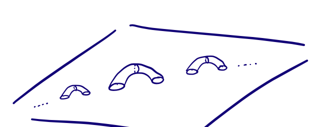
ensemble de Cantor

(1) Σ surface de type fini $\rightsquigarrow$ $\Sigma \smallsetminus \mathcal{C}$

— Liée avec des systèmes dynamiques sur Σ.

— $\mathbb{R}^2 \smallsetminus \mathcal{C}$ $\rightsquigarrow$ motivation clé pour D. Calegari quand il a popularisé les "grands groupes de difféotopie" en 2009

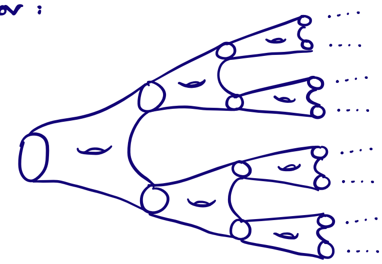
(2) Surface du monstre du Loch Ness :



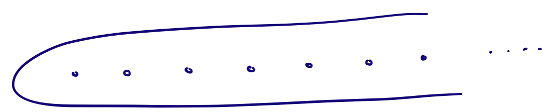
$\cong$

$L =$

(3) Monstre du Loch Ness de Cantor :

$L_{\mathcal{C}} =$ 

(4) Surface de flûte :

$F =$ 

[Kerékjártó, Richards]

En général, les surfaces connexes, orientables avec $\partial = \emptyset$ sont classifiées par

- genre(S) $\qquad \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
- (E, E_{np}) $\qquad$ (espace qui est $\cong$ sous-espace fermé de $\mathcal{C}$, sous-espace fermé)

  $E_{np} \neq \emptyset \iff$ genre$(S) = \infty$

$\bar{S}$ = compactification de Freudenthal de S

E_{np} = espace des bouts non planaires de S = les points non localement planaires de $\bar{S} \setminus S$

<u>Exemples</u>

S	genre(S)	E	E_{np}
$\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}$	0	$\mathcal{C} \sqcup *$	$\emptyset$
L	∞	$*$	$*$
$L_{\mathcal{C}} \cup D^2$	∞	$\mathcal{C}$	$\mathcal{C}$
F	0	$(\mathbb{N})^+$	$\emptyset$

Nullité

Thm A (P.–Wu '22)

$$\forall i \geq 1, \quad H_i(\mathrm{Mod}(D^2 \setminus e); \mathbb{Z}) = 0 = H_i(\mathrm{Mod}(L_e); \mathbb{Z})$$

↳ Coro $\quad H^*(\mathrm{Mod}(\mathbb{R}^2 \setminus e); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[x] \qquad \deg(x) = 2$

Thm B (P.–Wu '24)

Si $\mathrm{genre}(S) = \infty$ et $\Sigma \subset S$ est une sous-surface compacte,
alors $\forall i \geq 1$, $\quad H_i(\mathrm{Mod}(\Sigma); \mathbb{F}) \xrightarrow[0]{} H_i(\mathrm{Mod}(S); \mathbb{F})$
pour tout corps $\mathbb{F}$.

↳ Coro

$$\underset{\Sigma \text{ cpt}}{\mathrm{colim}} \left(H_*(\mathrm{Mod}(\Sigma); \mathbb{Q}) \right) \xrightarrow{0} H_*(\mathrm{Mod}(S); \mathbb{Q})$$

$$\cong \; \mathbb{Q}[\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \ldots]^*$$

Conjecture de Mumford
[Madsen–Weiss '02]

classes de
Miller–Morita–Mumford

Peut cela être non nulle ?

Remarques (a) Avec des coefficients dans $\mathbb{Z}$ au lieu de $\mathbb{F}$ ⇝ question ouverte.
$\left(\mathbb{Z} \xrightarrow{1/2} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \right)$

(b) Nous répondons aussi partiellement à la question pour $\mathrm{genre}(S) < \infty$, qui est plus compliquée.

Indénombrabilité

Thm C (P.-Wu'22)

(1) $\forall i \geq 1 \qquad H_i(\mathrm{Mod}(L); \mathbb{Z}) \supseteq \bigoplus_{|\mathbb{R}|} \mathbb{Z}$

(2) La même pour $\mathrm{Mod}(F)$.

Remarques (a) Également vrai pour des coefficients dans tout corps $\mathbb{F}$ de caractéristique 0, et plus généralement tout groupe abélien A tel que $A \longrightarrow A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ soit injectif.

(b) Ceci généralise [Domat'20], qui a étudié H_1.

(c) Il n'y a pas de torsion connue...

Exercice pour le public

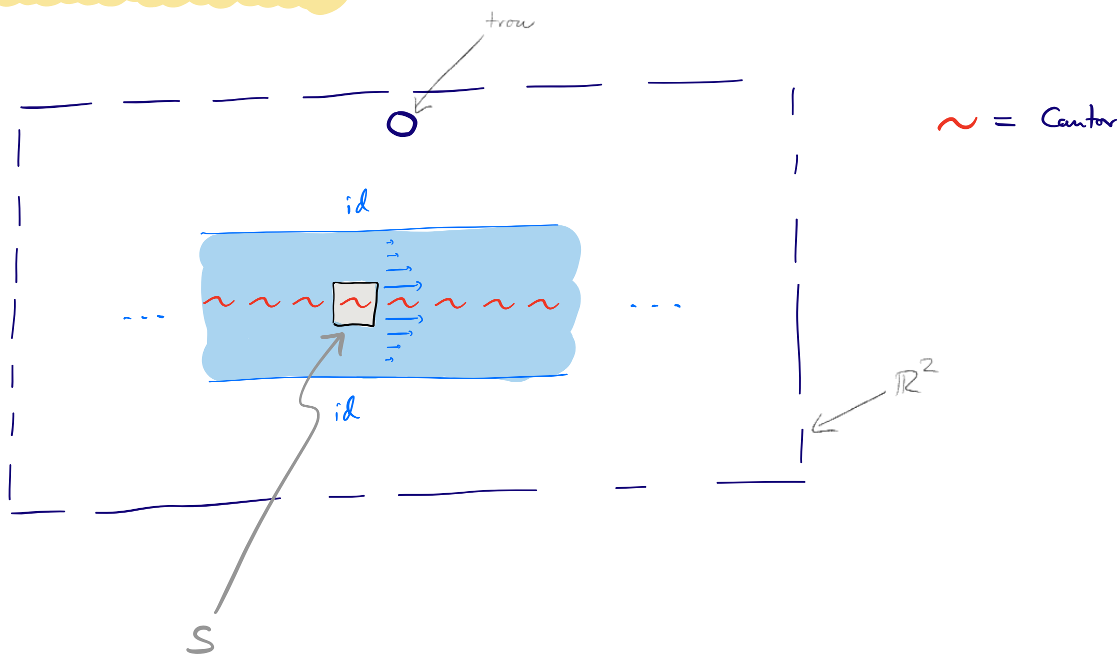
(Sera utilisé dans 20-30 minutes...)

$\exists$ collection de taille indénombrable $\{ X_a \subseteq \mathbb{N} \mid a \in \mathbb{R} \}$ telle que

$$\begin{cases} \cdot \text{ tout } X_a \text{ est infini} \\ \cdot \text{ tout } X_a \cap X_b \text{ est fini} \end{cases}$$

Démonstration du Thm A

$T :=$



$S \cong D^2 \setminus \mathcal{C}$

T : genre $= 0$

espace des bouts $= \left(\coprod_{\mathbb{N}} \mathcal{C}\right)^+ \cong \mathcal{C}$.

$\partial = S^1$

$\Rightarrow \quad T \cong D^2 \setminus \mathcal{C}$.

$\varphi \in \mathrm{Homeo}_\partial(T)$

- Les images itérées de S sont disjointes par paires.
- Leur réunion est <u>fermé</u>.

$\Big\downarrow$ <u>Prop.</u>
- adaptée de [Mather '71]
- liée aux groupes dissipés (binates) [Berrick, Varadarajan]

prolonger avec id sur $T \setminus S$

Si $\mathrm{Map}(S) \longrightarrow \mathrm{Map}(T)$ est un H_*-isomorphisme

alors $H_i(\mathrm{Map}(S)) = H_i(\mathrm{Map}(T)) = 0$ pour tout $i \geq 1$.

Obs

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, hook] & T \\ \boxed{\sim} \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] \arrow[r, hook, "i_1"] & \boxed{\sim \mid \sim} \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] \\ \boxed{\sim \mid \sim} \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] \arrow[r, hook, "i_2"] & \boxed{\sim \mid \sim \mid \sim} \arrow[u, phantom, "\cong" rotate=90] \\ \vdots & \vdots \end{tikzcd}$$

Thm (P.-Wu)

$$\mathrm{Mod}\left(\boxed{\sim}\right) \xrightarrow{(i_1)_*} \mathrm{Mod}\left(\boxed{\sim \mid \sim}\right) \xrightarrow{(i_2)_*} \mathrm{Mod}\left(\boxed{\sim \mid \sim \mid \sim}\right) \longrightarrow \cdots$$

est <u>homologiquement stable</u> : $(i_n)_*$ induit $\cong$ sur $H_k(-)$ si $k \leq n/2$.

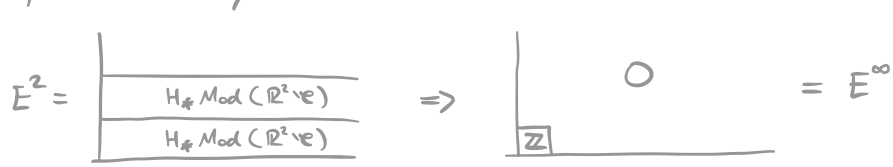
$\hookrightarrow$ <u>Coro</u> $(i_1)_*$ est un H_*-isomorphisme (en tout degré).

<u>Notes</u>:

- La demonstration de la stabilité homologique utilise des techniques de [Szymik-Wahl '17], qui ont démontré la conjecture de longue date selon laquelle le groupe V de Thompson soit acyclique.

- Extension centrale $0 \to \mathbb{Z} \longrightarrow \mathrm{Mod}(D^2 \setminus \mathcal{C}) \to \mathrm{Mod}(\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{C}) \to 1$

  Suite spectrale de Lyndon-Hochschild-Serre :



Démonstration du Thm B

Étape 1

Déf. T surface avec $\partial T \cong S^1$

$$\mathrm{Grid}(T) := \begin{array}{c|c|c|c|c|c}
\ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \iddots \\
\hline
\cdots & T & T & T & T & \cdots \\
\hline
\cdots & T & T & T & T & \cdots \\
\hline
\cdots & T & T & T & T & \cdots \\
\hline
\end{array}$$

Proposition

Pour une telle surface T et tout corps $\mathbb{F}$,

$$H_i(\mathrm{Mod}(T);\mathbb{F}) \longrightarrow H_i(\mathrm{Mod}(\mathrm{Grid}(T));\mathbb{F})$$

est 0 pour tout $i \geq 1$.

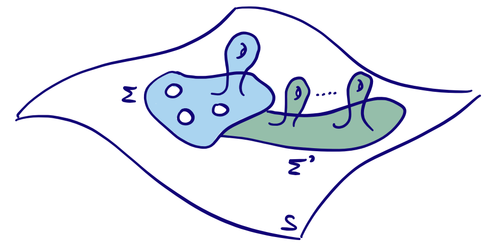
Remarques (a) La démonstration utilise une stratégie dynamique similar à la démonstration de la Proposition dans la démonstration du Thm A ci-dessus — mais en utilisant deux dimensions au lieu de seulement une.

(b) [Berrick, Varadarajan] démontrent que les groupes pseudo-mitotiques (binates) sont acycliques en utilisant une stratégie d'itération infinie, comme dans la démonstration du Thm A.

(c) Pourquoi des coefficients dans un corps $\mathbb{F}$: on a besoin d'un scindement naturel dans la suite exacte courte de Künneth.

$\boxed{\text{Étape 2}}$

(i) Pour tout $g \geq 0$, trouver $\underset{\Sigma_{g,1}}{\overset{\Sigma'}{\cong}} \hookrightarrow S$ t.q. $\Sigma' \cap \Sigma$ = intervalle



(ii) Prolonger

$$\begin{tikzcd}
\Sigma' \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, "\cap" description] & S \\
\mathrm{Grid}(\Sigma') \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

plongement propre

(iii) Pour tout $i \geq 1$, choisir n'importe quel $g \geq \frac{3}{2} i$.

$H_i(-) = H_i(-;\mathbb{F})$

$$\begin{tikzcd}
H_i\,\mathrm{Mod}(\Sigma) \arrow[d] \arrow[dr] & \\
H_i\,\mathrm{Mod}(\Sigma \natural \Sigma') \arrow[r] & H_i\,\mathrm{Mod}(S) \\
H_i\,\mathrm{Mod}(\Sigma') \arrow[u, two heads] \arrow[ur] \arrow[r] & H_i\,\mathrm{Mod}(\mathrm{Grid}(\Sigma')) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

surjectif
$\left(\text{genre}(\Sigma') = g \geq \frac{3}{2} i\right)$
[Harer '85, ...]

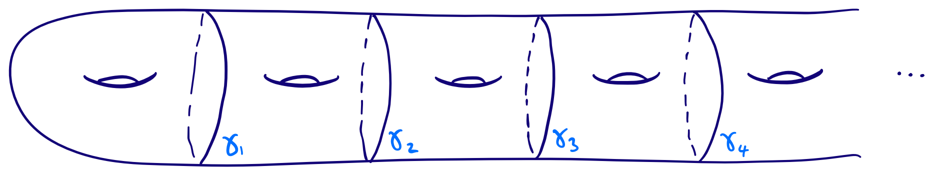
0 par Étape 1

$\mathrm{Mod}(\Sigma_{g,b}) \longrightarrow \mathrm{Mod}(\Sigma_{g+g',b+b'})$ induit $\cong$ sur $H_i(-)$

lorsque $g \gg i$.

Point important : il y a la stabilité par rapport à g et b lorsque g est suffisamment grand (sans aucune condition sur b).

Démonstration du Thm C(1)

$L =$ 

$$H_i(\mathrm{Mod}(L);\mathbb{Z}) \supseteq \bigoplus_{|\mathbb{R}|} \mathbb{Z} \quad \text{pour } i \geq 1$$

$H_i(-) = H_i(-;\mathbb{Z})$

Idée : Factoriser $\bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Z} \hookrightarrow \bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}$ au travers de $\mathrm{Mod}(L)$.

Conséquence :

$$\begin{tikzcd}
H_i\left(\bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Z}\right) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & H_i(\mathrm{Mod}(L)) \arrow[r] & H_i\left(\bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}\right) \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] \\
\Lambda^i\left(\bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Z}\right) \arrow[rr, hook, "\text{injectif}"'] \arrow[d, phantom, "\cong" rotate=90] & & \Lambda^i\left(\bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}\right) \\
\bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Z} & &
\end{tikzcd}$$

Construction :

$$X \subseteq \mathbb{N} \longrightarrow \begin{cases} f(X) := \prod_{i \in X} (T_{\gamma_i})^{i!} \\ f_n(X) := \prod_{\substack{i \in X \\ i \geq n}} (T_{\gamma_i})^{i!/n} \end{cases}$$

L'exercice de plus tôt :

$\exists$ collection de taille indénombrable $\{X_a \subseteq \mathbb{N} \mid a \in \mathbb{R}\}$ telle que

$$(*) \begin{cases} \cdot \text{ tout } X_a \text{ est infini} \\ \cdot \text{ tout } X_a \cap X_b \text{ est fini} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{Z} \arrow[r, "1_a \longmapsto f(x_a)"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Mod}(L) \arrow[d, two heads] \\ \bigoplus_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{Q} \arrow[r, "\theta"', "(\frac{1}{n})_a \longmapsto [f_n(x_a)]"] & \mathrm{Mod}(L)^{ab} \end{tikzcd}$$

<u>Vérifier :</u>

- $f(x_a) - f_n(x_a)^n$ support cpt
- [Birman, Powell '70s] $\Rightarrow$

$$[f(x_a) - f_n(x_a)^n] = 0$$

$(*)$ + [Domat '20] $\longleftarrow$ [Bestvina - Bromberg - Fujiwara '15]

$\Rightarrow$ θ est injectif

Mais $\bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}$ est un $\mathbb{Z}$-module injectif

$\Rightarrow$ tout morphisme injectif $\bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Q} \hookrightarrow A$ admet une retraction

$\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathrm{Mod}(L) \arrow[d, two heads] \\ \bigoplus_{a\in\mathbb{R}} \mathbb{Q} \arrow[r, "\theta"] & \mathrm{Mod}(L)^{ab} \arrow[l, bend left, dashed] \end{tikzcd}$$

$\square$

<u>Remarque</u>

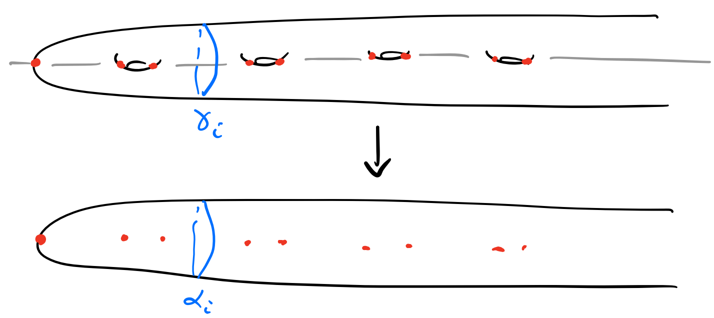
$$\begin{array}{ccc} H^i(\bigoplus_c \mathbb{Z}) & \xleftarrow{\quad 0 \quad} & H^i(\bigoplus_c \mathbb{Q}) \\ \cong & & \cong \\ \prod_c \mathbb{Z} & & \begin{cases} 0 & i=1 \\ \bigoplus_{2^c} \mathbb{Q} & i \geq 2 \end{cases} \end{array}$$

Démonstration du Thm C(2)

$$H_i(\mathrm{Mod}(F);\mathbb{Z}) \supseteq \bigoplus_{|\mathbb{R}|} \mathbb{Z} \quad \text{pour } i \geq 1$$

surface de flûte

Idée (adaptée de [Malestein-Tao'21]) :



$$\begin{tikzcd} L \setminus \mathbb{N} \arrow[d, two heads, "\pi"] \\ F \end{tikzcd}$$

Lemme Tout homéomorphisme basé de F préserve $\pi_1(L \setminus \mathbb{N}) \overset{(2)}{\triangleleft} \pi_1(F)$ et peut donc être relevé (uniquement) à un homéomorphisme basé de $L \setminus \mathbb{N}$.

$$\begin{tikzcd}
 & T_{\alpha_i}^2 \in \mathrm{Mod}_*(F) \arrow[d, "\text{relèvement}"] & \\
 & \mathrm{Mod}_*(L \setminus \mathbb{N}) \arrow[d, "\text{oubli du point de base}"] & \\
 & \mathrm{Mod}(L \setminus \mathbb{N}) \arrow[d, "\text{remplissage des ponctions}"] & \\
 & T_{\gamma_i} \in \mathrm{Mod}(L) \arrow[dr] & \\
\bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Z} \arrow[uuuur, "1_a \mapsto \hat{f}(X_a)"] \arrow[ur, "1_a \mapsto f(X_a)"] \arrow[rr] & & \bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

$$f(X) := \prod_{i \in X} (T_{\gamma_i})^{i!}$$

$$\hat{f}(X) := \prod_{i \in X} (T_{\alpha_i}^2)^{i!}$$

Puis passer vers Mod(F) en utilisant la suite exacte de Birman

$$K = \pi_1(F) \cong F_\infty \quad \text{dénombrable}$$

$$\begin{tikzcd}
 & K \arrow[d, hook] & \\
\bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathrm{Mod}_*(F) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads] & \bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Q} \\
 & \mathrm{Mod}(F) &
\end{tikzcd}$$

$I \subseteq \mathbb{R}$

$I :=$ composants de $\bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Q}$ où un élément de $\varphi(K)$ a une coordonnée non nulle.

dénombrable

$\Rightarrow |\mathbb{R} \setminus I| = |\mathbb{R}|$.

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[d, hook] \arrow[rr, "0"] & & \bigoplus_{\mathbb{R}\setminus I} \mathbb{Q} \\
\bigoplus_{\mathbb{R}\setminus I} \mathbb{Z} \arrow[r, hook] \arrow[rrrru, bend right=60, "\bigoplus_{\mathbb{R}\setminus I} (\mathbb{Z} \xhookrightarrow{\text{inc.}} \mathbb{Q})"'] & \bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Z} \arrow[r] & \mathrm{Mod}_*(F) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, two heads] & \bigoplus_{\mathbb{R}} \mathbb{Q} \arrow[ru, two heads] & \\
 & & \mathrm{Mod}(F) \arrow[rruu] & &
\end{tikzcd}$$

$\square$