Université Clermont Auvergne — Année 2025–2026
Travaux Dirigés de Licence 1ère année — Mathématiques S1

U.E. – L1 Mathématiques S1

Contrôle continu du 14 Novembre (substitution pour le contrôle du 24 Octobre)

Durée : 45 minutes.
Les calculatrices non programmables sont autorisées ; les documents et autres matériels électroniques sont interdits.

Exercice 1 :
(7 points)
Calculer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3+x^2}{4+x+2x^3}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2+x+\sin(x^2+1)}{\sqrt{x^2+8}}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x}\right)^x$ *Indication : Ici on pourrait faire un changement de variable.*

Pour calculer ces limits, on peut utiliser sans preuve des limites découlant d'une comparaison de croissance, telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x)$, etc.

Exercice 2 :
(7 points)

1. Démontrer que l'équation
$$x = x^2\sin(x) + \cos(2x)$$
a au moins une solution réelle dans l'intervalle $[0,\pi]$.
2. Calculer les deux limites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^3 - 3\cos(x)$ et en déduire qu'il existe au moins un nombre réel $a \in \mathbb{R}$ tel que $a^3 = 3\cos(a)$.

Exercice 3 :
(6 points)
Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer l'ensemble des précédents par f de l'intervalle $[0,+\infty[$.
2. L'application f est-elle une bijection ? Donner des justifications.
3. Trouver deux intervalles A et B tels que les applications $A \to \,]-\infty, 0]$ et $B \to [0,+\infty[$ définies par $x \mapsto f(x)$ soient bijectives.