Université Clermont Auvergne — Année 2025–2026

Travaux Dirigés de Licence 1ère année — Mathématiques S1

U.E. – L1 Mathématiques S1

Contrôle continu du 24 Octobre

Durée : 45 minutes.
Les calculatrices non programmables sont autorisées ; les documents et autres matériels électroniques sont interdits.

Exercice 1 :
(7 points)
Calculer les limites suivantes, si elles existent.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5+2x^3}{7+x+x^2}$
2. $\lim\limits_{x\to-1^+} \ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{(x^{-2})}$

Indication : Pour les deuxième et troisième limites, on pourrait faire un changement de variable.

Pour calculer ces limits, on peut utiliser sans preuve des limites découlant d'une comparaison de croissance, telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x}$, $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x)$, etc.

Exercice 2 :
(7 points)
Soit I l'intervalle ouvert $]-1,+\infty[$ et soit $f\colon I\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x\ln(x+1)$.
Démontrer qu'il existe

1. $x_1 \in I$ tel que $f(x_1) = 1$;
2. $x_2 \in I$ tel que $f(x_2) = f(x_2+1)$.

Indication : On pourrait dans chaque cas définir une fonction $g\colon I\to\mathbb{R}$ appropriée et calculer $g(0)$ et la demi-limite $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)$. Pour le deuxième cas, l'un des calculs de l'exercice 1 pourrait vous être utile.

Exercice 3 :
(6 points)
Soit $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = (x-1)^2 - 1$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et soit $A = [0,4]$.

1. Déterminer l'image de A par f.
2. L'application f est-elle une bijection ? Donner des justifications.
3. Trouver deux intervalles B et C (différents) tels que les deux applications $B\to[0,+\infty[$ et $C\to[0,+\infty[$ définies par $x\mapsto f(x)$ soient bijectives.