Université Clermont Auvergne — Année 2025–2026
Travaux Dirigés de Licence 1ère année — Mathématiques S1

U.E. – L1 Mathématiques S1

Contrôle continu du 5 Décembre (substitution pour le contrôle du 28 Novembre)

Durée : 45 minutes.
Les calculatrices non programmables sont autorisées ; les documents et autres matériels électroniques sont interdits.

Exercice 1 :
(6 points)

1. Donner la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$a = -1 + \sqrt{3}\, i \qquad\qquad b = (1+i)^4$$

2. Calculer $2 + a + \frac{1}{2}a^2$.
3. Décrire les formes des sous-ensembles suivants du plan $\mathbb{C}$:
   (a) $\{z \in \mathbb{C} : z^4 \in \mathbb{R}\}$
   (b) $\{z \in \mathbb{C} : (z - 2i)(\bar{z} + 2i) = 4\}$
   (c) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z^2) \not\equiv 0 \pmod{2\pi}\}$

Exercice 2 :
(8 points)
On considère les nombres complexes suivants :

$$c = -\sqrt{3} + 3\, i \qquad\qquad d = 1 + i$$

1. Calculer $\frac{c}{d}$ en forme algébrique.
2. Donner les formes exponentielles de c et d.
3. En déduire à partir de la partie 2 la forme exponentielle de $\frac{c}{d}$.
4. En déduire la valeur d'un réel $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\cos(\alpha) = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{6}}$.

Exercice 3 :
(6 points)

1. Soit $z = re^{i\theta}$ pour des nombres réels r, θ où $r > 0$. Écrire en fonction de r et θ :
   (a) $-z$;
   (b) z^n, où $n \geqslant 1$ est un entier.
2. Donner une formule pour $2\cos(\theta)$ en termes de l'exponentielle complexe.
3. Trouver la forme exponentielle de $r^2 + z^2$ selon la valeur de θ.
   (Indication : utiliser la formule de la partie 2.)
4. Montrer que $\dfrac{r^2 + z^2}{z}$ est réel.