Université Clermont Auvergne
Travaux Dirigés de Licence 1ère année

Année 2025–2026
MATHÉMATIQUES S1

U.E. – L1 MATHÉMATIQUES S1

Contrôle continu du 28 Novembre

Durée : 45 minutes.
Les calculatrices non programmables sont autorisées ; les documents et autres matériels électroniques sont interdits.

Exercice 1 :
(6 points)

1. Donner la forme algébrique des nombres complexes suivants :
$$a = \frac{2+4i}{1-i} \qquad\qquad b = 4e^{\frac{\pi i}{4}}$$
2. Quel est le plus petit entier $n \geqslant 1$ tel que b^n soit un nombre réel ?
3. Décrire les formes des sous-ensembles suivants du plan $\mathbb{C}$:
   (a) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leqslant |z+i| \leqslant 2\}$
   (b) $\{z \in \mathbb{C} : \arg(z^2) = \frac{3\pi}{2}\}$
   (c) $\{z \in \mathbb{C} : (z-\bar{z})(z+\bar{z}) = 0\}$

Exercice 2 :
(8 points)

1. Soit $z = x + iy$ pour des nombres réels x, y. Déterminer en fonction de x et y :
   (a) le module de z^2 ;
   (b) la partie réelle de z^2 ;
   (c) la partie imaginaire de z^2.
2. On suppose maintenant que $z = x + iy = 2e^{\frac{\pi i}{8}}$.
   (a) Calculer z^2 en forme exponentielle et en déduire son module et sa partie réelle. *(Indication : voir l'exercice 1.)*
   (b) Calculer x et y en utilisant la partie 1 de cet exercice.
   (c) En déduire une expression pour $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et pour $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 3 :
(6 points)

1. Soit $z = re^{i\theta}$ pour des nombres réels r, θ où $r > 0$. Écrire en fonction de r et θ :
   (a) $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$;
   (b) $\bar{z}$;
   (c) $\frac{1}{z}$.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, donner des expressions pour $\cos(x)$ et pour $\sin(x)$ en fonction de l'exponentielle complexe.
3. En déduire une expression pour $\cos^2(x)\sin^2(x)$ en fonction de $\cos(4x)$.